08.02.2022

Adı Soyadı:
Numarası:
Grubu:
İmza:

1	2	3	4	5	6	7	8	Toplam

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

2021-2022 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 211 ANALİZ III (1. VE 2. GRUP) BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sin\left(x^5\right)}$ has olmayan integralinin karakterini inceleyiniz.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ serisinin mutlak veya koşullu yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.

3) $f_n(x)=\frac{x^n}{n+x^n}$ genel terimli (f_n) fonksiyon dizisinin $[0,\infty)$ kümesi üzerinde düzgün yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n^2\pi x\right)+arc\cot\left(x^{2n}\ln\left(nx^2+1\right)\right)}{n^{\frac{5}{2}}+n^{\frac{1}{2}}+5}$ fonksiyon serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaklığını inceleyiniz.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^3+1}(x-1)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık kümesini bulunuz.

6) $\mathbb{R}^n$ de Cauchy dizisi, yakınsak dizi ve sınırlı dizi tanımlarını vererek her Cauchy dizisinin sınırlı olduğunu gösteriniz.

7) $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\infty<x\leq 2,\ -1<y\leq 1\right\}\cup\left\{(3,0)\right\}$ kümesi verilsin.

a) S°, S', $\overline{S}$ ve ∂S kümelerini bulunuz.

b) S kümesinin açık küme, kapalı küme ve kompakt küme olup olmadığını belirleyiniz.

8) $\mathbb{R}^3$ de $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!.n^n}{(2n)!}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n^2\right)}{11+e^n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n+4}{\sqrt{n^8+n^5+n}}\right)$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Not: Sadece 6 soru cevaplayınız. Sorular eşit puanlıdır. Süre 100 dakikadır. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR, Prof. Dr. Cenap DUYAR

ANALİZ III BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sin(x^5)}$ integralinin karakterini

belirleyiniz.

Çözüm: $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sin(x^5)}$ dersek; $\forall a\in(0,1]$ için

f, $[a,1]$ aralığında sürekli olup integrallenebilirdir.

Ayrıca her $x\in(0,1]$ için $f(x)>0$ dır.

$g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ seçelim. $\forall a\in(0,1]$ için g, $[a,1]$ de

sürekli olup integrallenebilirdir.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sin(x^5)}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\left(1+\frac{\sin(x^5)}{\sqrt[3]{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\frac{\sin(x^5)}{\sqrt[3]{x}}}=1\in(0,\infty)$$

$$\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x^5)}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\cos(x^5)).5x^4}{\frac{1}{3}.x^{-2/3}}=\lim_{x\to 0^+}15.\cos(x^5).x^{14/3}=0\right)$$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ $\left(p=\frac{1}{3}<1\right)$ integrali p-testi gereği

yakınsak olup verilen integral yakınsaktır.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$ serisinin mutlak veya koşullu yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{\ln n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$a_n = \frac{\ln n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ serisi ıraksaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$

$a_n = \frac{\ln n}{n}$

- $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$
- $f(n) = \frac{\ln n}{n} \Rightarrow f'(n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot n - \ln n}{n^2} = \frac{1-\ln n}{n^2} < 0$ ($\forall n \geq 3$ için)

$\Rightarrow f$ AZALAN

O halde Leibnitz testi gereği verilen seri yakınsaktır.
Mutlak değeri ıraksak olduğu için seri koşullu yakınsaktır.

3) $f_n(x) = \frac{x^n}{n+x^n}$ genel terimli (f_n) fonksiyon dizisinin $[0,\infty)$ kümesi üzerinde düzgün yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n+x^n} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} = f(x)$

(f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna $[0,\infty)$ üzerinde noktasal yakınsar. Ancak $\forall n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde sürekli olmasına rağmen f fonksiyonu $x=1$ noktasında sürekli değildir, çünkü $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ ve $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0$ dır. O halde (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna $[0,\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olamaz.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n^2\pi x) + \operatorname{arccot}(x^{2n} . \ln(nx^2+1))}{n^{5/2} + n^{1/2} + 5}$ fonksiyon serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|\sin(n^2\pi x)| \leq 1$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $0 < \operatorname{arccot}(x^{2n} . \ln(nx^2+1)) < \pi$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\left| \frac{\sin(n^2\pi x) + \operatorname{arccot}(x^{2n} . \ln(nx^2+1))}{n^{5/2} + n^{1/2} + 5} \right| \leq \frac{1+\pi}{n^{5/2} + n^{1/2} + 5}$$

$$< \frac{1+\pi}{n^{5/2}} = M_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = (1+\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ $\left(p = \frac{5}{2} > 1\right)$ p-testi gereği yakınsak olup verilen fonksiyon serisi $\mathbb{R}$ üzerinde Weierstrass M-testi gereği düzgün yakınsaktır,

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3+1} (x-1)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık kümesini bulunuz.

Çözüm: $a_n = \frac{n}{3n^3+1}$, $x_0 = 1$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n^3+1} \cdot \frac{3(n+1)^3+1}{n+1} = 1 \quad \text{yakınsaklık yarıçapı}$$

$(x_0 - R, x_0 + R) = (0, 2)$

$x = 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3+1} (-1)^n$ serisi elde edilir. Bu serinin mutlak yakınsaklığına bakarsak; $b_n = \frac{1}{n^2}$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3} \in (0,\infty)$ olduğundan $\sum \frac{1}{n^2}$ ile $\sum \frac{n}{3n^3+1}$ aynı karakterde olup yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3n^3+1}$ yakınsaktır.

$x = 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3+1}$ serisi elde edilir. Bu serinin yakınsaklığını yukarıda elde ettik.

Sonuç olarak verilen kuvvet serisinin yakınsaklık kümesi $[0, 2]$ dir.

6-) $\mathbb{R}^n$ Cauchy dizisi, yakınsak dizi ve sınırlı dizi tanımlarını vererek her Cauchy dizisinin sınırlı olduğunu gösteriniz.

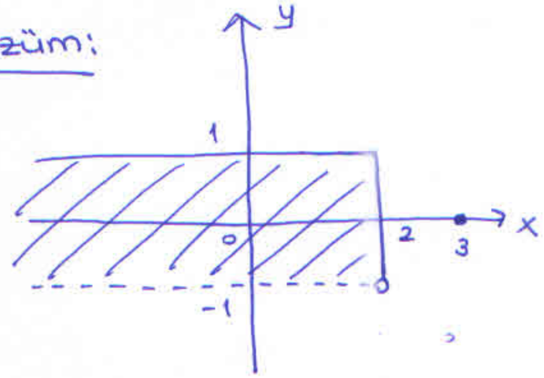
Çözüm: Ders notlarında var.

7-) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x \le 2, -1 < y \le 1\} \cup \{(3,0)\}$ kümesi verilsin.

a) S°, S', $\overline{S}$ ve ∂S kümelerini bulunuz.

b) S kümesinin açık küme, kapalı küme ve kompakt küme olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm:



$-\infty < x < 2$, $-1 < y < 1$ ise

$\varepsilon = \min\{2-x, 1-y, y+1\}$

seçilirse $B((x,y), \varepsilon) \subset S$ olur. Dolayısıyla $(x,y) \in S^\circ$ dir. O halde

$S^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < 2, -1 < y < 1\}$

elde edilir.

$-\infty < x \le 2$ ve $-1 \le y \le 1$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\left(B((x,y), \varepsilon) - \{(x,y)\}\right) \cap S \neq \emptyset$ olup $(x,y) \in S'$ dir.

$(3,0) \in S$ için $\varepsilon = 1$ seçilirse $\left(B((3,0), 1) - \{(3,0)\}\right) \cap S = \emptyset$ olup $(3,0) \notin S'$ dir.

Dolayısıyla $S' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x \le 2, -1 \le y \le 1\}$ dir.

$\overline{S} = S \cup S'$ idi. O halde $\overline{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x \le 2, -1 \le y \le 1\} \cup \{(3,0)\}$ olur.

$\partial S = \overline{S} - S^\circ$ idi. O halde

$$\partial S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x \le 2, y = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x \le 2, y = -1\} \cup$$

$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2, -1 < y < 1\} \cup \{(3,0)\}$$

dir.

$S^\circ \neq S$ olduğundan S açık değildir.

$\overline{S} \neq S$ olduğundan S kapalı değildir.

S kapalı olmadığından kompakt değildir.

8-) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot n^n}{(2n)!} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{11+e^n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+4}{\sqrt{n^8+n^5+n}} \right)$

serisinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot n^n}{(2n)!}$ pozitif terimli

$$a_n = \frac{n!\cdot n^n}{(2n)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(n+1)!}^{(n+1)\cdot \cancel{n!}}\cdot (n+1)^{n+1}}{\underbrace{(2n+2)!}_{\frac{(\cancel{2n+2})(2n+1)\cancel{(2n)!}}{2}}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{n!}\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2\cdot(2n+1)\cdot n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2(2n+1)}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \frac{e}{4} < 1$$

Oran testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot n^n}{(2n)!}$ yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{11+e^n}$ pozitif terimli değil. Mutlak yakınsaklığına bakalım.

$$\left| \frac{\sin(n^2)}{11+e^n} \right| \leq \frac{1}{11+e^n} < \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$\frac{1}{e} < 1$ olduğundan $\sum\left(\frac{1}{e}\right)^n$ serisi yakınsak ve karşılaştırma testi gereği $\sum\left|\frac{\sin(n^2)}{11+e^n}\right|$ serisi yakınsaktır. Bu ise $\sum\frac{\sin(n^2)}{11+e^n}$ serisinin mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsak olduğunu gösterir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+4}{\sqrt{n^8+n^5+n}}$ pozitif terimli

$$a_n = \frac{2n^2+3n+4}{\sqrt{n^8+n^5+n}} = \frac{2n^2+3n+4}{\sqrt{n^8\left(1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^7}\right)}} = \frac{2n^2+3n+4}{n^4\sqrt{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^7}}}$$

$b_n = \frac{1}{n^2}$ seçelim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^3+4n^2}{n^4\sqrt{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^7}}} = 2 \in (0,\infty)$$ olduğundan

$\sum a_n$ ile $\sum b_n$ aynı karakterdedir. $\sum\frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan $\sum a_n$ yakınsaktır.

Sonuç olarak $\mathbb{R}^3$ de verilen seri yakınsak olur.